

Capítulo 3

Técnicas de control

Un sistema de control es, como su nombre lo indica, un sistema el cual cumple la función de manipular algún tipo de señal para entregar una señal de salida que este acorde a la funcionalidad correcta o deseada de un proceso.

Por lo general la función de transferencia de un sistema es suficiente para regular un proceso, siempre y cuando se hayan tenido en cuenta todas las posibles variaciones, o se haya escogido un rango de operación adecuado.

Las técnicas de control son importantes a la hora de condicionar, por llamarlo de alguna manera, una variable dentro de un rango determinado o a un valor fijo de señal para obtener un resultado sin importar, en esencia, los factores que puedan afectar el proceso.

Resulta obvio entonces la necesidad de medir adecuadamente la señal a manipular, así mismo identificar el tipo de proceso, ya sea continuo o discreto; de igual manera es muy importante la descripción matemática o empírica del proceso a controlar.

Una clasificación de las técnicas de control puede ser la siguiente:

- ▷ Técnicas de control convencionales.
- ▷ Técnicas de control avanzado.
- ▷ Técnicas de control por lógica difusa (*fuzzy logic*).

Se explicarán en este trabajo, las técnicas de control convencionales por ser la estrategia de control seleccionada.

3.1. Técnicas de control convencionales

Determinado, en gran medida, por el conocimiento minucioso del proceso de planta a controlar. La optimización idónea se consigue desarrollando un modelo matemático que refleje exactamente el sistema de balance de energía y de materiales. Generalmente se hace con control directo digital, en donde la unidad de control reacciona de alguna manera particular frente a una señal de error, entre las que están, a saber:

3.1.1. Modo de control de dos posiciones [on – off]

El controlador es en esencia un interruptor activado por la señal de error y proporciona sólo una señal correctora tipo encendido–apagado (*on–off*).

La acción de control del modo de dos posiciones es discontinua, en consecuencia ocurren oscilaciones de la variable controlada (figura 3.1) en torno a la condición requerida. Esto se debe a retrasos en la respuesta del sistema de control y del proceso. Se utiliza generalmente con una banda diferencial o zona neutra, es decir con valores diferentes de encendido y apagado [7].

Este tipo de control funciona satisfactoriamente en procesos donde la velocidad de reacción del sistema es lenta y posee un tiempo de retardo mínimo.

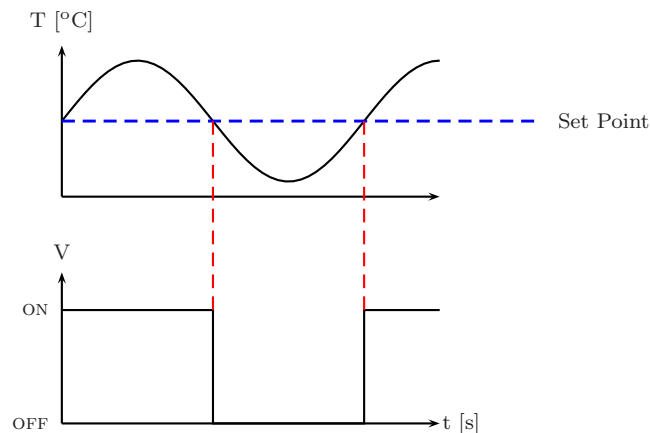


Figura 3.1. Control de temperatura de dos posiciones para un sistema de refrigeración.

3.1.2. Control proporcional

Este tipo de control produce una acción de control proporcional al error. La señal de corrección aumenta en la medida en que lo haga el error. Si el error disminuye, también

disminuye la magnitud de la corrección y el proceso de corrección es más lento.

La figura (3.2) muestra cómo varía la salida del controlador con la magnitud y signo del error. La relación lineal entre la entrada y salida solo existe en un intervalo llamado *banda proporcional*.

Dentro de la banda proporcional la ecuación de la línea recta está representada por la ecuación (3.1):

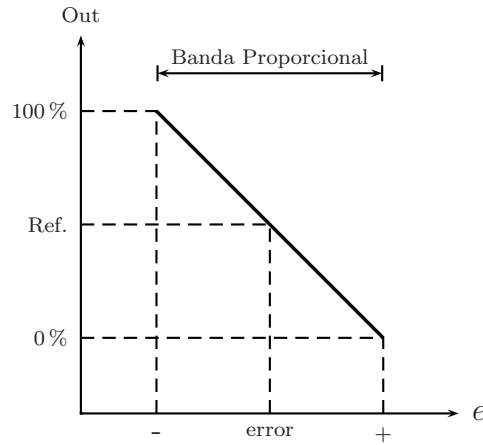


Figura 3.2. Curva característica de un control proporcional

$$\%Salida\ controlador = K_p e \quad (3.1)$$

Donde e es el error y K_p es la constante proporcional.

Por lo general se expresa el error en porcentajes, donde se observa que un 100 % en la salida del controlador equivale a un porcentaje de error igual a la banda proporcional, esto se puede anotar de la siguiente manera:

$$\%Out = I_o - I_0 = K_p e$$

Donde I_0 es el porcentaje de salida del controlador cuando no hay error e I_o es el porcentaje de salida cuando el error es e .

Aplicando la transformada de Laplace tenemos:

$$\%Out(s) = K_p E(s)$$

De donde podemos deducir que K_p corresponde a la función de transferencia del controlador, dentro de la banda proporcional.

En general, cuando el error es cero, se elige como salida 50 % de la salida del controlador.

En el control proporcional hay un elemento de ganancia en serie con con el elemento en la trayectoria directa de la planta $G(s)$. El error es entonces:

$$E(s) = \frac{K_p G(s)}{1 + K_p G(s)} X(s)$$

Si suponemos una entrada escalón, el error en estado estable será:

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \left[s \frac{1}{1 + 1/K_p G(s)} \frac{1}{s} \right]$$

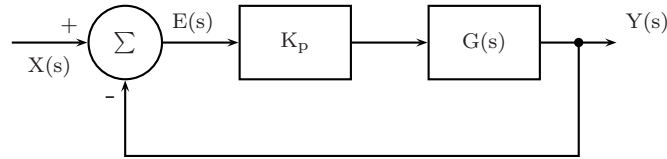


Figura 3.3. Sistema con control proporcional

El valor anterior será finito, es decir, siempre habrá error en estado estable. A valores pequeños de K_p corresponden errores de estado estable grandes, pero también respuestas estables. A valores grandes de K_p corresponden errores de estado estable pequeños, aunque hay mayor tendencia a la inestabilidad.

3.1.3. Control derivativo

En este tipo de control, el cambio de la salida del controlador respecto al valor de referencia es proporcional a la rapidez de cambio en el tiempo de la señal de error.

Esto se puede representar mediante la ecuación:

$$I_{sal} - I_0 = K_d \frac{de}{dt}$$

Donde I_0 es el valor de la salida para el valor de referencia, I_{sal} el valor de la salida cuando el error e cambia con una tasa igual a $\frac{de}{dt}$.

Hallamos la función de transferencia tomando la transformada de Laplace:

$$(I_{sal} - I_0)(s) = K_d s E(s) \quad (3.2)$$

Por lo que la función de transferencia es $K_d s$.

En el control derivativo existe una relación lineal entre la velocidad de variación de la variable controlada y la posición del elemento final de control.

Cabe anotar que el control derivativo no responde a errores en estado estable, ya que la variación del error en este caso sería cero, por lo que se utiliza en combinación con el control proporcional o el control integral.

3.1.4. Control integral

Este modo de control es en el que la tasa de cambio de la salida de control I es proporcional a la señal de entrada del error e .

$$dI = K_i e dt$$

Donde K_i es la constante de proporcionalidad integral y se expresa en sg^{-1} cuando el error se expresa en porcentajes. Integrando la ecuación anterior tenemos:

$$\begin{aligned} \int_{I_0}^{I_{sal}} dI &= \int_0^t K_i e dt \\ I_{sal} - I_0 &= \int_0^t K_i e dt \end{aligned}$$

Tomamos la transformada de Laplace para hallar la función de transferencia:

$$(I_{sal} - I_0)(s) = \frac{1}{s} K_i E(s)$$

Por lo que la función de transferencia del controlador integral es:

$$\frac{(I_{sal} - I_0)(s)}{E(s)} = \frac{1}{s} K_i \quad (3.3)$$

En la figura (3.4), se muestra el comportamiento del control integral ante una señal constante de error.

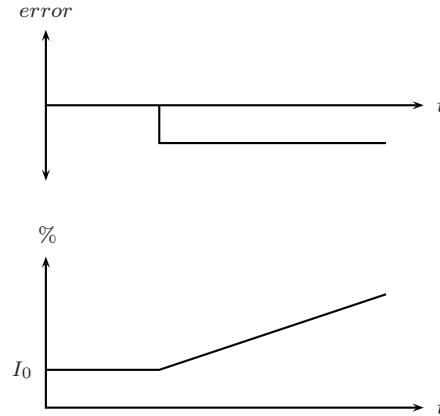


Figura 3.4. Acción del controlador integral frente a una señal de error constante de entrada

El análisis de las figuras puede ser el siguiente: cuando la salida del controlador es constante (I_0), el error es cero; cuando la salida del controlador varía a una tasa constante, el error tiene un valor constante.

El modo de control integral por lo común no se utiliza solo, con frecuencia se utiliza junto con el método proporcional. En este caso la salida del controlador I_{sal} está dada por:

$$I_{sal} = K_p e + K_i \int e dt + I_0$$

Y la función de transferencia es:

$$F(s) = \frac{K_p}{s} \left(s + \frac{1}{T_i} \right)$$

En donde T_i es la *constante de tiempo integral*, y esta definida por:

$$T_i = \frac{K_p}{K_i}$$

3.1.5. Controlador PID

Al combinar los tres modos de control, proporcional, integral y derivativo, se obtiene un controlador que no tiene desviación en el error y disminuye la probabilidad a producir oscilaciones. Este tipo de control es conocido como *controlador de tres modos* o *controlador PID*.

La ecuación que describe su comportamiento es:

$$I_{sal} = K_p e + K_i \int e dt + K_d \frac{de}{dt} + I_0$$

El controlador de tres modos se puede considerar como un controlador proporcional que a su vez tiene un control integral para eliminar la desviación del error, así como un control derivativo para reducir los retrasos. Aplicando transformada de Laplace, tenemos:

$$(I_{sal} - I_0)(s) = K_p E(s) + \frac{1}{s} K_i E(s) + s K_d E(s)$$

la función de transferencia es entonces:

$$\begin{aligned} F(s) &= K_p + \frac{1}{s} K_i + s K_d \\ F(s) &= K_p \left(1 + \frac{1}{s T_i} + s T_d \right) \end{aligned} \quad (3.4)$$

En la práctica, para implementar un controlador PID, se debe tener en cuenta la limitación en la ganancia para altas frecuencias en la parte derivativa, ya que de lo contrario el controlador se tornaría inestable por la sensibilidad al ruido de alta frecuencia.

La ecuación de implementación para un controlador PID real con punto de consigna igual a cero esta dada por la ecuación (3.5)[7].

$$F(s) = K_c \left(1 + \frac{1}{\tau_i s} \right) \left(\frac{1 + \tau_d s}{1 + \alpha \tau_s} \right) \quad (3.5)$$

En la cual, el valor de α están entre 0.05 y 0.1.

Cabe anotar que el esquema de control PID ha sido usado de manera exitosa en muchos sistemas de control industrial por más de cincuenta años.

3.1.6. Sintonización de controladores

La acción de sintonizar un controlador hace referencia a escoger los mejores parámetros, que en el caso de un controlador PID, es seleccionar los valores para K_p , K_i y K_d . Existen varios métodos para una correcta selección de éstos parámetros, entre ellos: el método de la curva de reacción de proceso de Ziegler y Nichols y el método de la última ganancia [6].

Método de la curva de reacción de proceso

Para aplicar este método, el lazo de control del proceso se abre entre el controlador y la unidad de corrección.

Tabla 3.1. Criterio de la curva de reacción de proceso

Modo de control	K_p	T_i	T_d
P	P/RL		
PI	$0,9P/RL$	$3.33L$	
PID	$1,2P/RL$	$2L$	$0,5L$

A la unidad de corrección se aplica una señal de entrada de prueba y se determina la respuesta de la variable controlada. La señal de prueba debe ser tan pequeña como sea posible. Por lo general se utiliza una entrada tipo escalón cuya amplitud se expresa como el cambio porcentual P en la unidad de corrección.

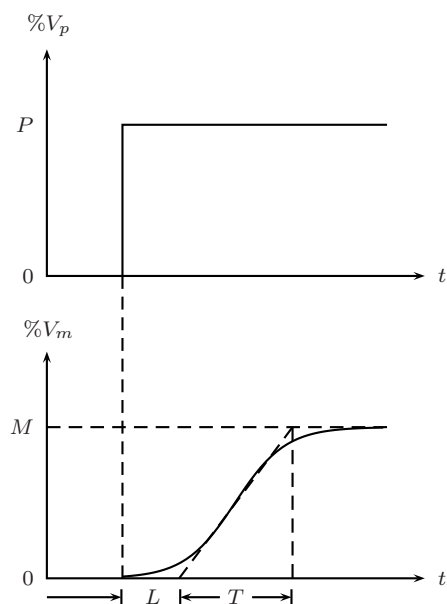


Figura 3.5. Curva de reacción de proceso

Los parámetros se calculan según la tabla (3.1), teniendo en cuenta los criterios de la figura (3.5).

Se traza una tangente para obtener el gradiente máximo de la curva. En la figura (3.5), la pendiente máxima R es M/T . El tiempo entre el inicio de la señal de prueba y el punto donde esta tangente intersecta al eje del tiempo se conoce como retardo L .

Método de última ganancia

Este método está basado en el hecho de utilizar solo en controlador proporcional, cuya función de transferencia es la constante proporcional K_p , se puede aplicar solo cuando la planta es estable en lazo abierto. Los pasos para aplicar el método de última ganancia son los siguientes [8]:

1. Utilizando solo el control proporcional, comenzando con un valor de ganancia K_p pequeño, incrementar la ganancia hasta que el sistema empiece a oscilar con una amplitud constante. El valor de la ganancia a la cual el sistema oscila se conoce como *ganancia última* (K_u).
2. Obtener gráficamente el valor del período de oscilación (T_u) y calcular los valores para la sintonización del controlador según la tabla (3.2).

Tabla 3.2. Parámetros de ajuste con el método de última ganancia.

Modo de control	K_p	T_i	T_d
P	$0.50 K_u$		
PI	$0.45 K_u$	$0.83 T_u$	
PID	$0.60 K_u$	$0.50 T_u$	$0.125 T_u$

Con el criterio de sintonización de última ganancia, la razón de asentamiento es de un cuarto, es decir la razón de amplitud entre dos oscilaciones sucesivas es de uno a cuatro.

3.1.7. PID discreto

Hasta ahora se ha tomado al sistema de control y a la planta como funciones continuas en el tiempo. El control PID se podría implementar haciendo un seguimiento continuo de la variable a controlar, por lo general se usan amplificadores operacionales, teniendo en cuenta la función de transferencia generada por el uso de impedancias capacitivas.

Un circuito típico PID continuo se muestra en la figura (3.6).

En donde se puede definir las respectivas constantes del controlador de la siguiente manera:

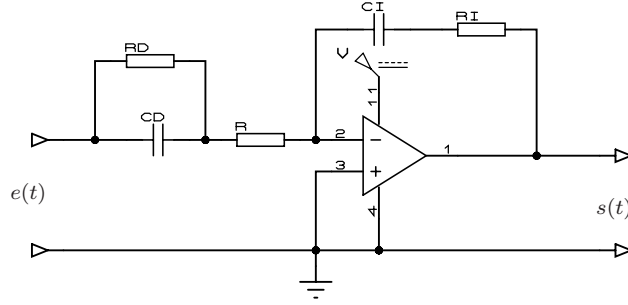


Figura 3.6. Circuito PID continuo construido con un amplificador operacional.

$$\begin{aligned} K_p &= \frac{R_I}{R + R_D} \\ K_d &= R_D C_D \quad \text{y} \\ K_i &= \frac{1}{R_I C_I} \end{aligned}$$

Cuando se trabaja con microcontroladores, se hace un cambio en el tipo de señal de analógica a digital, por medio de un proceso de conversión, llamado proceso de muestreo, por lo que no se puede aplicar directamente los conceptos de sintonización de controladores anteriormente vistos, ya que aparecen otros conceptos (como el retenedor de orden cero) los cuales modifican la función de transferencia del sistema y del controlador debido al cambio de variable.

Así como en el tiempo continuo se tiene a la transformada de Laplace para simplificar los cálculos y obtener de manera sencilla las funciones de transferencia, en el análisis en tiempo discreto se utiliza la transformada z , la cual, para una función continua $x(t)$, está definida de la siguiente forma [9]:

$$X(z) = Z[x(t)] = Z[x(kT)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k} \quad (3.6)$$

Donde T , es el período de muestreo del conversor analógico-digital, y $k \in \mathbb{Z}$.

Los elementos básicos de un controlador digital se muestran en la figura (3.7). La operación del controlador se maneja por el reloj. La señal de error se convierte a forma digital mediante un circuito de muestreo y retención y el convertidor analógico-digital. En la parte del controlador digital es muy importante el proceso de muestreo y retención, ya que es el proceso donde cambia la señal de analógica a digital. Se puede entender

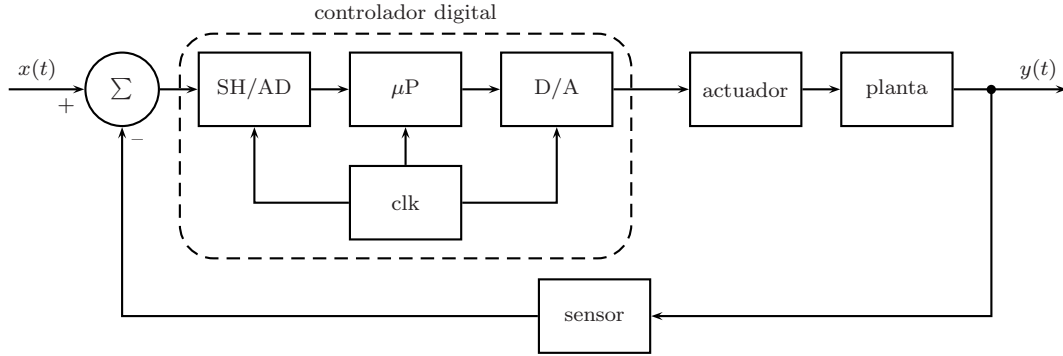


Figura 3.7. Diagrama de bloques de un sistema de control digital.

mejor esta conversión si se supone que la señal digital $x^*(t)$ es el resultado de multiplicar la señal continua $x(t)$ por la función impulso, es decir, se obtiene una secuencia de impulsos separadas en el tiempo T [sg] cuya amplitud es el valor de $x(t)$ en el instante de muestreo. Matemáticamente esto es:

$$\begin{aligned}
 x^*(t) &= x(0)\delta(t) + x(T)\delta(t-T) + \dots + x(kT)\delta(t-kT) + \dots \\
 x^*(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) \delta(t-kT)
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

recordemos que $\delta(t-kT) = 0 \forall t \neq kT$.

Podemos definir entonces la salida $x^*(t)$, como el producto de la señal continua $x(t)$ y una señal portadora δ_T (función impulso unitario):

$$\begin{aligned}
 x^*(t) &= x(t)\delta_T(t) \\
 \delta_T(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t-kT)
 \end{aligned}$$

A este tipo de muestreador se le conoce como muestreador mediante impulsos como modulador, y se ilustra en la figura (3.8).

Tomando la transformada de Laplace a la ecuación (3.7) tenemos:

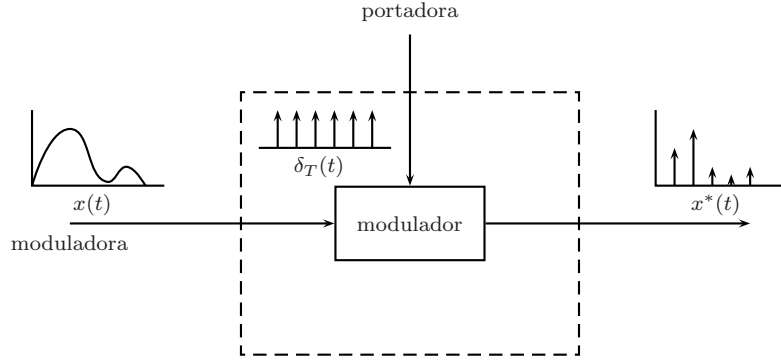


Figura 3.8. Muestreador mediante impulsos como modulador

$$\begin{aligned}
 X^*(s) &= \mathcal{L}[x^*(t)] \\
 &= x(0)\mathcal{L}[\delta(t)] + x(T)\mathcal{L}[\delta(t-T)] + x(2T)\mathcal{L}[\delta(t-2T)] + \dots \\
 &= x(0) + x(T)e^{-Ts} + x(2T)e^{-2Ts} + \dots
 \end{aligned}$$

Expresandola como sumatoria:

$$X^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)e^{-kTs} \quad (3.8)$$

Donde podemos definir:

$$e^{Ts} = z \quad (3.9)$$

Reemplazando en la ecuación (3.8) tenemos:

$$X^*(s) \big|_{s=(1/T)\ln z} = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k} \quad (3.10)$$

Comparando la ecuación (3.10) con la ecuación (3.6), podemos escribir:

$$X^*(s) \big|_{s=(1/T)\ln z} = X(z) \quad (3.11)$$

Podemos concluir entonces que la transformada de Laplace de la señal muestreada mediante impulsos $x^*(t)$ ha mostrado ser la misma que la transformada z de la señal $x(t)$,

si se define $z = e^{Ts}$.

En casos reales, la señal muestreada se debe mantener fija o constante hasta el próximo instante de muestreo, lo cual genera la curva escalonada. En si la retención de datos es un proceso de generación de una señal en tiempo continuo $h(t)$, a partir de una señal en tiempo discreto $x^*(t)$. Se puede expresar $h(t)$, matemáticamente, entre dos intervalos consecutivos de muestreo, es decir $kT \leq t < (k+1)T$, aproximandola mediante un polinomio en τ como:

$$h(kT + \tau) = a_n \tau^n + a_{n-1} \tau^{n-1} + \dots + a_1 \tau + a_0$$

Donde $0 \leq \tau < T$.

Como el retenedor, en el caso real, mantiene el valor de $x^*(t)$, entre muestreos consecutivos, es decir, en el intervalo de tiempo $0 \leq \tau < T$, la ecuación anterior se reduce a [9]:

$$h(kT + \tau) = a_0$$

Y debido a que en el momento de muestreo, las dos funciones tienen el mismo valor, es decir $h(kT) = x^*(kT)$, la ecuación que describe el comportamiento de la función muestreada y mantenida en el tiempo es:

$$h(kT + t) = x^*(kT), \quad \text{para } 0 \leq t < T$$

Con la cual, aplicando transformada de Laplace y luego de unas operaciones, hallamos la función de transferencia del sistema retenedor, llamado *retenedor de orden cero* [9]:

$$G_{h_0} = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \quad (3.12)$$

Nuestro sistema de control digital queda entonces de la siguiente manera:

El tiempo de muestreo T es un factor importante en el controlador discreto, ya que afecta a la función de transferencia del sistema (ver Ec. 3.9 y Ec. 3.23), debido al cambio de variable de tiempo continuo a discreto, esto se hace evidente en la aparición del *retenedor de orden cero*.

Las características de la respuesta transitoria del controlador en tiempo discreto también se ven afectadas por el valor del tiempo de muestreo T . Una regla práctica es muestrear de ocho a diez veces durante un ciclo de las oscilaciones senoidales amortiguadas de la salida del sistema en lazo cerrado [9].

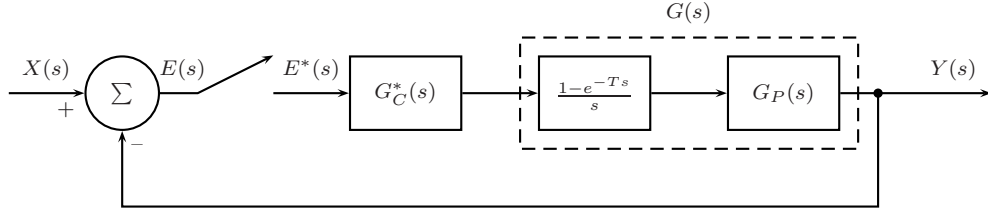


Figura 3.9. Diagrama de bloques de un controlador digital.

La asignación de los polos en tiempo discreto en función del tiempo de muestreo T y del factor de amortiguamiento relativo ξ , está determinado por la ecuación (3.13).

$$|z| = e^{-T\xi\omega_n} \quad (3.13)$$

El tiempo de muestreo afecta también el error en estado estable del sistema de control; para una entrada rampa, se define de la siguiente manera [9]:

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} \quad (3.14)$$

Donde K_v , se conoce como *constante de error de velocidad estática* y está definida por:

$$K_v = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(1 - z^{-1}) G(z)}{T} \quad (3.15)$$

Es obvio que al aumentar el tiempo de muestreo, el error en estado estacionario frente a una entrada rampa (error de velocidad estática) aumenta.

Para calcular el tiempo de muestreo se disponen, como condiciones de diseño, el tiempo de asentamiento t_s y el factor de amortiguamiento relativo ξ ; tomando el criterio del 2%, el tiempo de asentamiento se define como:

$$t_s = \frac{4}{\xi\omega_n} \quad (3.16)$$

Con lo que se puede calcular el tiempo de muestreo en función de la frecuencia natural amortiguada ω_d , teniendo en cuenta que, como se mencionó anteriormente, se debe muestrear de ocho a diez veces durante cada oscilación. Tenemos entonces, que el tiempo de muestreo está definido por:

$$T = \frac{2\pi}{10\omega_d} \quad (3.17)$$

La función de transferencia del controlador en tiempo discreto se conoce como *función de transferencia pulso*, la cual se halla discretizando la función de transferencia de un controlador PID en tiempo continuo. Para esto se aproximan la parte integral con la sumatoria trapezoidal y la parte derivativa con la diferencia entre dos puntos [9], con lo que obtenemos:

$$m(kT) = K \left\{ e(kT) + \frac{T}{T_i} \sum_{h=1}^k \frac{e((h-1)T) + e(hT)}{2} + \frac{T_d}{T} [e(kT) - e((k-1)T)] \right\} \quad (3.18)$$

Donde $e(t)$ es la señal de entrada al controlador, $m(t)$ es la salida del controlador, K es la ganancia proporcional, T_i es el tiempo integral, T_d es el tiempo derivativo y T es el período de muestreo.

Tomando la transformada z de la ecuación (3.18) y realizando algunas manipulaciones algebraicas tenemos¹:

$$M(z) = K \left[1 + \frac{T}{2T_i} \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} + \frac{T_d}{T} (1-z^{-1}) \right] E(z) \quad (3.19)$$

La cual se puede describir de la siguiente manera:

$$M(z) = \left[K_p + \frac{K_I}{1-z^{-1}} + K_D(1-z^{-1}) \right] E(z) \quad (3.20)$$

definiendo:

$$\begin{aligned} K_P &= K - \frac{KT}{2T_i} \\ K_I &= \frac{KT}{T_i} \\ K_D &= \frac{KT_d}{T} \end{aligned}$$

Resulta evidente la diferencia entre las constantes de sintonización del controlador de tiempo continuo y de tiempo discreto.

¹El desarrollo de estas operaciones se muestran en [9].

Para hallar las constantes de sintonización del controlador se analiza el polinomio característico deseado $P(z)$, el cual se define como:

$$P(z) = 1 + G_c(z)G_p(z) \quad (3.21)$$

En donde:

$G_c(z)$: Función de transferencia del controlador.

$G_p(z)$: Función de transferencia de la planta.

En tiempo discreto, el polinomio característico deseado, está definido por:

$$P(z) = z^2 - 2r \cos \theta + r^2 \quad (3.22)$$

Donde:

$$\begin{aligned} r &= e^{-\xi \omega_n T} \\ \theta &= \omega_d T \end{aligned}$$

Al igualar el polinomio característico deseado con el polinomio del sistema controlador-planta con realimentación se obtienen las constantes de sintonización del controlador.

Discretización de la planta

Como se pretende trabajar en tiempo discreto debemos hallar la transformada z de la función de planta (2.3), recordando que existe un retenedor de orden cero. Tenemos entonces:

$$G(z) = Z \left[\frac{1 - e^{-Ts}}{s} \frac{b}{s + a} \right]$$

Por propiedad de la transformada z :

$$\begin{aligned} G(z) &= (1 - z^{-1})Z \left[\frac{b}{s(s + a)} \right] \\ G(z) &= \frac{b}{a}(1 - z^{-1})Z \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s + a} \right] \end{aligned}$$

Sabiendo que:

$$\begin{aligned} Z \left[\frac{1}{s} \right] &= \frac{1}{1 - z^{-1}} \\ Z \left[\frac{1}{s + a} \right] &= \frac{1}{1 - e^{-aT} z^{-1}} \end{aligned}$$

Tenemos, luego de algunas operaciones:

$$G(z) = \frac{cz^{-1}}{1 - e^{-aT} z^{-1}} \quad (3.23)$$

Donde:

$$c = \frac{b}{a} (1 - e^{-aT})$$

Tomamos un tiempo de muestreo $T = 0,5$ [s], con base en las ecuaciones (3.16) y (3.17), la ecuación (3.23) toma la forma:

$$G(z) = \frac{0,375z^{-1}}{1 - 0,75z^{-1}}$$

La función de transferencia pulso del controlador PID está dada por [9]:

$$G_c(z) = K_p + \frac{K_i}{1 - z^{-1}} + K_d(1 - z^{-1}) \quad (3.24)$$

La temperatura de nuestro sistema descrito por la ecuación (2.8) no varía rápidamente y de forma brusca, por lo que no tomamos la parte diferencial de la ecuación (3.24), tenemos entonces:

$$\begin{aligned} G_c(z) &= K_p + \frac{K_i}{1 - z^{-1}} \\ G_c z &= \frac{(K_p + K_i) - K_p z^{-1}}{1 - z^{-1}} \end{aligned} \quad (3.25)$$

Recordando que la función de transferencia pulso para un sistema con realimentación unitaria esta dada por la ecuación (3.26)

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{G_c(z)G(z)}{1 + G_c(z)G(z)} \quad (3.26)$$

Tenemos:

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{0,375(K_p + K_i)z^{-1} - 0,375K_p z^{-2}}{1 + [0,375(K_p + K_i) - 1,75]z^{-1} + [0,75 - 0,375K_p]z^{-2}}$$

Hallamos los valores de K_p y K_i igualando el denominador de la ecuación anterior con el polinomio característico deseado; resolviendo tenemos los siguientes valores:

$$\begin{aligned} K_p &= 1 \\ K_i &= 0,5 \end{aligned}$$

Reemplazando estos valores tenemos:

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{0,5625z^{-1} - 0,375z^{-2}}{1 - 1,1875z^{-1} + 0,375z^{-2}} \quad (3.27)$$

La respuesta de la ecuación (3.27) ante una entrada escalón se muestra en la figura (3.10).

La simulación se realizó en el entorno de MATLAB® con el siguiente código.

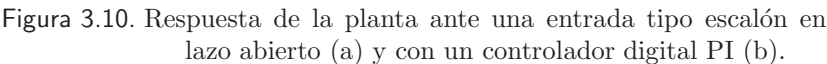
```
%respuesta escalon unitario
num = [0 0.5625 -0.375];
den = [1 -1.1875 0.375];
%planta
nump = [0 0.375]
denp = [1 -0.75]
%funcion escalon discreta
r = ones(1,101);
v = [0 100 0 2];
axis (v);
k = 0:100;

c = filter(num, den, r);
cp = filter(nump, denp, r);
plot(k,c,'.',k,cp,'o')
grid
title('Respuesta escalon unitario')
xlabel('k')
ylabel('c(k)')
save c.dat c -ASCII
save k.dat k -ASCII
save cp.dat cp -ASCII
```

La implementación hardware de este controlador se hace aprovechando las propiedades de la transformada z , resolviendo la ecuación en diferencias en el microcontrolador, con lo que la ecuación (3.27), se puede escribir de la siguiente manera:

$$y(k) = 1,1875y(k-1) - 0,375y(k-2) + 0,5625x(k-1) - 0,375x(k-2) \quad (3.28)$$

Teniendo en cuenta que el parametro z^{-1} corresponde a un retardo puro de un período de muestreo T , el factor $x(k-1)$ correspondería a el dato muestreado con un retardo en el período de muestreo, es decir:



Lo que reduce la solución de la ecuación en diferencias al trabajo con punteros. Como la salida del controlador está en función de señales muestreadas uno y dos períodos de muestreo antes, se suponen los valores anteriores de entrada y salida como cero. Esto hace que el controlador implementado tenga un tiempo de retardo en la respuesta dinámica, el cual sería de 1 segundo, tiempo en el cual abarcaría los dos períodos de muestreo.



Un pseudocódigo de implementación de un controlador solucionando una ecuación en diferencias sería el siguiente:

```

int EcDif (void)
{
    float k1;
    float k2;
    int *nptr;

    nptr = &x1;
    x2 = *nptr;
    x1 = temp_error();

    return (k1*x1 + k2*x2)
}

```

Donde [x1] y [x2] son variables globales y [temp_error()] es una subfunción encargada de adquirir el error en la temperatura con un período de muestreo de 0.5 [sg].

Siguiendo la misma arquitectura de programación para la parte de las salidas se puede programar el controlador en estructura de programación directa, como se muestra en la figura (3.11).

El hecho de truncar los valores a tres cifras significativas hace que aparezca un pequeño error en estado estable.

En el sistema no se pretende manipular la entrada de vapor, ya que en los procesos de destilación la entrada de éste es continua, por lo que el control sobre la planta principal no se implementa.